

# CONSTRUCCIÓN DEL LENGUAJE MATEMÁTICO. CUADROS Y TABLAS

Inés SANZ LERMA

*Departamento de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales  
Universidad del País Vasco*

*Resumen: Proponemos una caracterización del lenguaje matemático y sus diferentes componentes, entre los que se encuentran las configuraciones gráficas de datos, de las cuales forman parte los cuadros y tablas. Se ha construido una tipología de cuadros y tablas basada en datos obtenidos en libros escolares, ya que estimamos que en ellos aparecen los prototipos de actividades para construcción del significado de los objetos matemáticos, relativos a una institución escolar. Finalmente se hace una comparación entre los resultados hallados en los libros de una editorial para la E.G.B. en la década de los 80 y los actuales para Educación Primaria.*

*Los cuadros y tablas son elementos del lenguaje matemático usados en la investigación científica y en el aprendizaje de todas las áreas desde los primeros niveles, por lo que se recomienda su elaboración correcta a fin de que entren a formar parte del registro matemático personal de los estudiantes.*

## Introducción <sup>1</sup>

¿Qué idea tiene la gente acerca de qué es el conocimiento científico? El pasado 10-X-00 tuve la ocasión de oír al profesor R. Hoffman, en una conferencia que dio en la Facultad de Químicas de San Sebastián, haciéndose esta misma pregunta. Y empezó la caracterización presentando un comic en el que

---

<sup>1</sup> La elaboración teórica sobre el Lenguaje Matemático y las tablas y cuadros correspondientes al periodo 81-92 en libros escolares están tomados de Sanz (1995).

el Pato Donald lanzaba un discurso del tipo «Si juntamos  $\text{NH}_3$  con  $\text{CO}_2$  se transformará en alcohol»; un sobrino comentaba «Está charlando de Química» y otro añadía «Sí, pero no sabe lo que dice».

Todas las ciencias tienen un lenguaje especial por el cual se les puede identificar. El lenguaje matemático, como el lenguaje verbal ordinario, tiene además una característica instrumental, pues en él se expresan y manipulan otros campos de conocimiento; por eso, entre otras razones, se estudia desde los primeros niveles de enseñanza.

En el comic antes citado aparecían también una serie de cacharros por los que se podía ver que, además de hablar, estaban haciendo un experimento de Química. Todas las ciencias experimentales tienen esa nota identificativa de instrumentos de medida más o menos sofisticados para extraer datos de su campo de observación y experimentación. También la matemática extrae datos de la observación y experimentación, y utiliza instrumentos de dibujo y cálculo. Hoy es especialmente destacable la elaboración de conocimiento matemático, vía ordenadores, pero siempre se ha dado esta característica. Otra cosa es lo que podamos entender por Matemática formalizada que hay que situarla en el contexto de justificación y no en el de enseñanza-aprendizaje en el que estamos interesados.

Para utilizar correctamente el Lenguaje Matemático hay que entenderlo, no vale hablar o escribir sin sentido. Hay que conocer y por tanto aprender matemáticas significativas. Comparto la visión pragmática del significado que elabora Díaz Godino en sus trabajos (ver por ejemplo Godino 2000), refiriéndose a unas prácticas prototípicas significativas que han de realizar los estudiantes para alcanzar la comprensión personal de los objetos matemáticos.

Esas prácticas están relativizadas a una institución escolar y fuertemente mediatizadas por la cultura matemática de la época, de la cual es síntesis y representación el libro escolar, como enfatizan muchos autores, por ejemplo Escolano (1998). Los libros escolares son un espacio en que se representan los estereotipos de la época, no sólo en cuanto a las concepciones pedagógicas sino al currículo completo (estructura de temas, objetivos, actividades, etc.) e incluso la mentalidad matemática dominante que se refleja en la selección de temas y estructura intrínseca de la materia a estudiar modificadas por variadas transposiciones didácticas.

Los libros escolares y las guías didácticas o libros del profesor sustentan los prototipos de significado institucional escolar, ya que contemplan las actividades

de evaluación e incluso las respuestas canónicas respecto de las cuales se ha de evaluar la comprensión matemática personal de los estudiantes. En ellos por tanto encontraremos la «jerga matemática» que el estudiante ha de aprender y las actividades a través de las cuales se ha de elaborar, o sea las prácticas significativas como dice Godino.

El dominio del Lenguaje Matemático de un nivel implica la capacidad de resolver las tareas problemáticas de ese nivel y expresarlas de algún modo, esencialmente bajo formas verbales orales, escritura o gráficos, aunque en los primeros niveles también puede admitirse expresión manipulativa, raramente sola. Este dominio implica también la capacidad de traducción de una forma de expresión a otra que suele estar asociada a la construcción de significados más ricos y es una actividad observable en las propuestas que aparecen en los libros escolares.

Voy a centrar el artículo en una caracterización del lenguaje matemático desde un punto de vista semiótico y en el análisis de unas configuraciones especiales, cuadros y tablas de datos, de amplio uso en la presentación de la información de la vida diaria y en todos los campos científicos. Estos elementos del Lenguaje Matemático se construyen desde los primeros niveles de la Educación Primaria, como se puede deducir de las actividades prototípicas propuestas en los libros escolares.

### Lenguaje, Lengua y Matemáticas

En el campo de la Educación matemática han ido reuniéndose resultados de muchas investigaciones que destacaban las relaciones entre Matemáticas y Lenguaje. Esa problemática tiene orígenes conocidos: la interdependencia entre desarrollo de pensamiento y lenguaje, según pusieron de manifiesto Vygotski, Bruner (Bruner, 1984; Vygotski, 1991 y 1993) y un sinnúmero de investigadores, y las teorías representacionales que están en la base tanto de la ciencia cognitiva como de las teorías semióticas y epistemológicas, contribuyan a constituir la construcción del Lenguaje como un paradigma de la construcción de otros sistemas simbólicos. La Matemática pasaba así a ser uno más de los sistemas de signos culturalmente contruidos, por lo que no es de extrañar que una posición típica de lo que hoy se entiende como conocimiento matemático sea la llamada constructivismo social. Ya el hablar de conocimiento matemático en vez de Matemáticas implica una relativización de las Matemáticas a

un aparato cognitivo y a una situación social. El hecho de que los conceptos matemáticos sean una construcción social no implica que sean cualesquiera. Algunos son motivados en su construcción por las experiencias humanas más básicas, lo que puede contribuir a librarnos de un relativismo cultural total.

David Pimm analiza las posibles relaciones entre Lenguaje y Matemáticas y elige estudiar las Matemáticas como un Lenguaje. La llama la visión metafórica de las Matemáticas como Lenguaje lo que le permite considerar el aprendizaje de las matemáticas como análogo al aprendizaje de un idioma extranjero. Compara la competencia meta-matemática con la metalingüística y resume su postura diciendo: «aprender a hablar y, de modo más sutil, aprender a significar como un matemático, supone adquirir las formas, los significados y los modos de ver que se hallan en el registro matemático» (Pimm, 1987, página 288).

No todos los autores consultados enfatizan el paralelismo Lenguaje-Matemáticas; A. Cauty destaca las diferencias: «los observables fundamentales no son producciones lingüísticas, sino matemáticas. Es decir producciones escritas y doblemente heterogéneas que articulan una lengua natural (LN), en tanto que sistema de fundación, sistemas ad hoc de escrituras simbólicas (ES), en tanto que útiles algorítmicos de cálculo, y sistemas de representaciones gráficas (CG) en tanto que técnicas de representación visual» (Cauty, 1984, página 86).

En otro trabajo (Laborde, 1982) se utiliza este mismo punto de vista, ya que esta autora dice: «en un texto matemático escrito se utilizan dos códigos, la lengua natural y la escritura simbólica, es decir, una escritura formada por signos exteriores a la lengua natural tales como paréntesis, +, x, o letras y números. Estos signos pueden combinarse siguiendo reglas específicas para engendrar expresiones simbólicas». La Lengua Matemática, LM, es, según esta autora, el resultado del uso de esos dos códigos en interacción, la Lengua natural y la escritura simbólica.

J.D. Godino (2000) da un esquema de características de las matemáticas, que toma como hipótesis cognitivo-epistemológicas a fin de analizar el significado de los objetos matemáticos desde un punto de vista pragmático. Entre esas características figura la de que «la matemática es un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones problema y las soluciones encontradas. Los sistemas de símbolos matemáticos tienen una función comunicativa e instrumental». Reconoce por tanto al lenguaje matemático sus funciones esenciales comunicativa e instrumental. J.D. Godino separa de la característica «ser un lenguaje simbólico» la de ser la matemática un sistema conceptual lógicamente organizado, pero el lenguaje sim-

bólico engloba el sistema sintáctico y el semántico interrelacionados, por lo que esa característica es intrínseca al propio lenguaje matemático, es su plano semántico. Al separarlos lo que se hace es remarcar la organización lógica del plano semántico, organización que podemos tenerla en la cabeza, pero que sólo se puede ver y evaluar a través de la estructura de las expresiones sintácticas.

### El registro matemático

Si destacamos el aspecto funcional del Lenguaje se pueden construir conceptos como el de «Lenguaje desarrollado» que es un Lenguaje que se usa en todas las funciones para las que sirve en la sociedad en cuestión (Halliday, 1978). Desarrollar un Lenguaje, siguiendo esta idea, será aumentar el rango de sus funciones sociales y esto se logra desarrollando nuevos registros. «Un registro es un conjunto de significados apropiados para una determinada función del Lenguaje, junto con las palabras y estructuras que expresan esos significados» (Halliday, 1978, página 195).

Es evidente que el Lenguaje natural contiene en su campo semántico significados matemáticos, junto con expresiones específicas para contar, medir o clasificar. A partir de estos elementos la instrucción escolar elabora nuevos conceptos y expresiones, en suma va desarrollando el registro matemático. Halliday insiste en que: «son los significados, incluyendo los estilos de significar y modos de argumentar, lo que constituyen el registro, mas que las palabras y estructuras de las mismas como tales» (Halliday, 1978, página 195).

Pimm (1987, página 117) se hace eco de estas ideas de Halliday e indica que: «un registro está constituido no sólo por el simple uso de términos técnicos... sino también por determinadas expresiones e, incluso, ciertos modos característicos de argumentar».

Halliday trata de destacar la base semántica como esencial al desarrollo de un verdadero registro. O sea, de nada valen expresiones diferentes si no hay detrás un campo semántico estructurado y estructurante de las correspondientes expresiones, en suma, una estructura matemática sobre la que se siente la necesidad de hablar.

Una vez aceptadas estas ideas es fácil aceptar también la conclusión de Pimm de que parte del aprendizaje de las matemáticas consiste en aprender hablar como los matemáticos.

## La escritura matemática

Los textos escolares de matemáticas están formados, en mayor o menor medida según el nivel, por una serie de inscripciones alineadas que sólo en parte coinciden con lo que se llama expresión escrita en lenguaje natural. Precisamente las particularidades visuales de esta forma expresiva contribuyen a reconocer que se trata de un libro de matemáticas.

Voy a intentar justificar qué parte de las expresiones que sustenta un libro de matemáticas forman la escritura matemática y en qué se diferencia ésta de la escritura a secas, que la llamaré expresión verbal escrita, ya que es la versión en caracteres gráficos especiales de la expresión verbal oral de un lenguaje natural.

En un libro de Matemáticas nos podemos encontrar una expresión como «existe un elemento  $x$  perteneciente a un conjunto que llamamos  $A$ », aunque es más típico encontrar esta otra « $\exists x \in A$ ». La primera la reconocemos como expresión verbal escrita, ya que sigue las reglas de cómo se escribe normalmente en castellano. La segunda en cambio es, al menos en principio, dudosa. Hay en ella dos caracteres,  $\exists$ ,  $\in$ , que no pertenecen al alfabeto del castellano y que no sabríamos leer aplicando las reglas de que dispone una persona competente en esta lengua; pero además toda la expresión es como un bloque, como una palabra escrita en otro idioma, cuya comprensión no se logra ni deletreándola ni por una traducción simple a expresión verbal, oral o escrita. La situación se hace más patente a poco que se complejice este tipo de expresión, que llamaremos expresión simbólica específica de Matemáticas en este caso.

La escritura matemática contiene en general una mezcla de expresión verbal y expresión simbólica específica, que no es vertible en su totalidad a expresión verbal. Hay propiedades visuales de las expresiones simbólicas matemáticas que se pierden irremisiblemente en el intento de traducción de una forma de expresión a otra.

Otra cosa es que las distintas formas expresivas que aparecen en un libro escolar de Matemáticas sean en parte traducibles; de expresión verbal escrita a expresión simbólica específica y desde cualquiera de éstas a expresión gráfica, como ha analizado en otro lugar Sanz (Sanz, 1990). Este tema está íntimamente ligado con la construcción del significado de los conceptos matemáticos, que depende directamente del dominio del máximo de

variantes expresivas para cada uno, que facilitan además la creación de redes conceptuales.

Lo que acabo de decir implica mi acuerdo en principio con las ideas de Cauty y Laborde, aunque prefiero pensar en el lenguaje matemático como un todo, más al estilo de Pimm y tratar de diferenciar en él diferentes códigos para las diferentes formas expresivas con que se expresa el Lenguaje Matemático en los libros escolares: la expresión verbal escrita, la expresión simbólica específica y la expresión gráfica (ésta se podría englobar en la expresión simbólica específica, aunque no dentro de la escritura matemática, sin forzar la noción de escritura, por lo cual prefiero mantenerla separada). Fuera del libro nos queda además la expresión manipulativa y la expresión verbal oral, de importancia básica en la construcción del conocimiento matemático en los primeros niveles y relacionadas ambas con las expresiones que aparecen en los libros escolares, ya que en ellos se representan gráficamente supuestas situaciones y objetos del mundo real o de mundos intermedios simplificados ad hoc para el trabajo escolar en Matemáticas (Goñi y Sanz, 1990). Todas estas formas expresivas se relacionan entre sí y sería de gran interés conocer en detalle tanto su influencia en la construcción histórica del Lenguaje Matemático como en el aprendizaje actual del mismo.

A continuación voy a tratar de justificar la propuesta de llamar escritura matemática a algo más amplio que la expresión verbal escrita, esta última es una forma expresiva al servicio de las representaciones fonéticas del lenguaje natural. La escritura matemática se ha creado y evoluciona como el principal soporte expresivo del Lenguaje Matemático, y no está condicionada del todo por la expresión oral.

### **Análisis semiótico de la escritura**

La autora Elisa Ruiz (1992) en su estudio de la tecnología gráfica admite que los medios de comunicación visual y verbal oral partían de un esquema cognoscitivo común; que a partir del IV milenio a. C. abundan los testimonios que indican una interrelación entre procedimientos de expresión puramente gráficos y los lingüísticos y que progresivamente se fue especializando una expresión de las representaciones verbales, no llegando a constituirse una expresión autónoma codificada del sistema visual. Esta opción

supuso una pérdida de autonomía del sistema de la escritura que desde entonces pasó a depender del patrón lingüístico.

En las expresiones escritas se pueden considerar dos grandes grupos. En el primero tendríamos las escrituras cuyo tipo de grafismos tratan de expresar directamente conceptos o signos lingüísticos completos (ideogramas, logogramas,...). En el segundo tendríamos aquellas escrituras cuyos elementos están completamente subordinados a las representaciones fonéticas del Lenguaje (fonogramas) en las variantes silábicas, consonántica o alfabética. La escritura terminó especializándose en el segundo tipo, lo cual le permitió alcanzar características que le hacen un instrumento de gran perfección, pero se ha convertido en un sucedáneo de la expresión oral en el Lenguaje natural, por lo cual puede ser sustituida por la oralidad en todo momento. Por tanto, lo que en la actualidad llamamos escritura correspondiente a una Lengua, el castellano por ejemplo, es estrictamente la expresión verbal escrita, o sea, una representación fonética alfabética. Pero la escritura matemática es algo más.

La escritura matemática engloba la Lengua escrita, bajo un registro especial que hemos llamado registro matemático, y la expresión del sistema simbólico específico, ramas 1 y 2 respectivamente del esquema de la Figura 1.

Las expresiones del tipo 2 se ven, no simplemente se leen. Aunque muchas de ellas pueden ser leídas, en el sentido de que puede obtenerse una traducción a expresión verbal oral, lo leído es más una descripción de la expresión que la reconstrucción de un signo equivalente, ya que esas expresiones gozan de ciertas propiedades transformacionales que permiten desplazamientos parciales dentro de las mismas, inversión, combinación, etc., que no se mantienen en la expresión verbal asociada. O sea, el Lenguaje Matemático se construye directamente sobre ellas, sin tener que pasar por la mediación de la expresión verbal oral.

En la Figura 1 se ha esquematizado la descripción que acabo de hacer, adaptando un esquema que propone Ruiz (Ruiz, 1992, página 50) para la construcción histórica de la escritura. En este esquema puede añadirse una conexión entre los sistemas de representación artística y funcional pues tanto con técnicas tradicionales como actuales se suelen producir las mejores representaciones visuales con una integración de ambas, como puede verse en las maravillosas representaciones de Leonardo da Vinci (ver por ejemplo Marinini y Meneguzzo 1987).

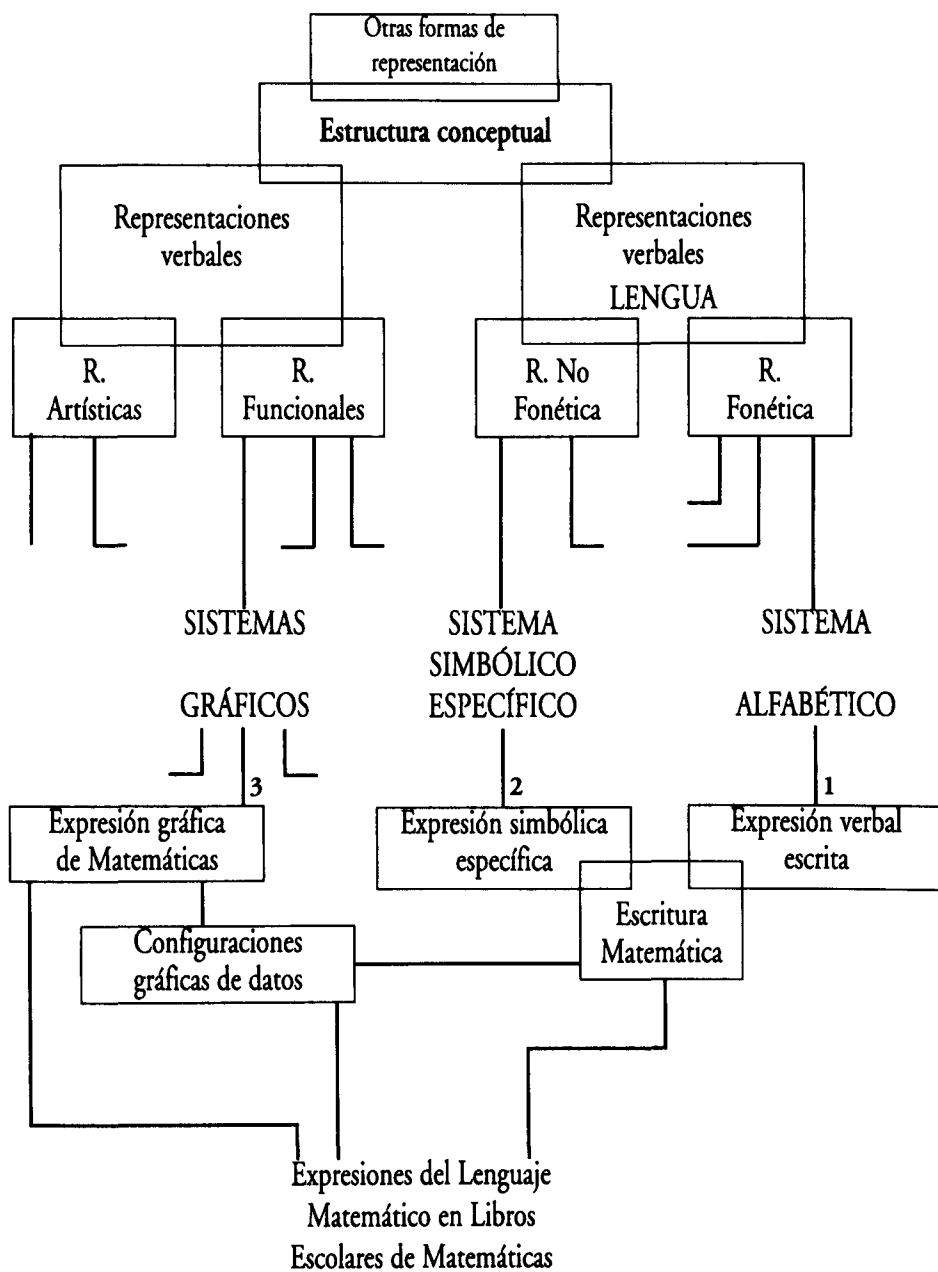


Figura 1. Esquema de las distintas formas expresivas del Lenguaje Matemático en libros escolares

Una conclusión del esquema de la Figura 1 es que la escritura matemática es la expresión escrita de lo que Cauty y Laborde llaman la Lengua Matemática. Pero en la interpretación que estoy haciendo esta escritura matemática no agota las posibles expresiones en Lenguaje Matemático, que puede codificarse también en sistemas gráficos diferentes del alfabético y el simbólico específico. No hay más que pensar en todos los sistemas tradicionales de representación de figuras geométricas planas y espaciales; pero también se representan gráficamente números naturales, enteros, racionales y relaciones o correspondencias entre conjuntos de lo más variadas. Y en la actualidad, con la introducción de las potentes herramientas de representación gráfica, este campo expresivo parece que aumenta cada día, al menos en todos los niveles de enseñanza de la matemática. Todas estas formas de expresión gráfica las reuniremos bajo el nombre expresión gráfica de Matemáticas y constituyen la rama 3 del diagrama de la Figura 1.

Finalmente destacar que existen expresiones complejas formadas con elementos de los tres sistemas: verbal escrito, gráfico y simbólico específico. Es lo que hemos designado en la Figura 1 como configuraciones gráficas de datos y en este trabajo daré algún ejemplo de ellos.

En los libros escolares de matemáticas suele haber fotos y dibujos más o menos integrados en el texto, pero que no los consideramos parte del Lenguaje Matemático, sino ilustraciones de objetos o situaciones a partir de las cuales se pueden elaborar expresiones en Lenguaje matemático. Suelen hacer de sustitutos de un supuesto mundo real, cuando no de mero adorno, con su propio código expresivo.

### **Distinción entre grafismo y gráfica**

Un grafismo es algo que se comprende en un solo acto de percepción, por ejemplo una señal de carretera de curva a la derecha. El grafismo sirve para definir un conjunto o un concepto. Un gráfico en cambio exige dos tiempos de percepción, en el primero se averigua de qué cosas trata y en el segundo de cuales son las relaciones entre ellas. Esto se debe a que una gráfica transcribe relaciones entre conjuntos previamente definidos, o sea, es siempre el resultado de un cuadro de doble entrada. Bertín (1988) insiste en esta caracterización de gráfica frente a grafismo.

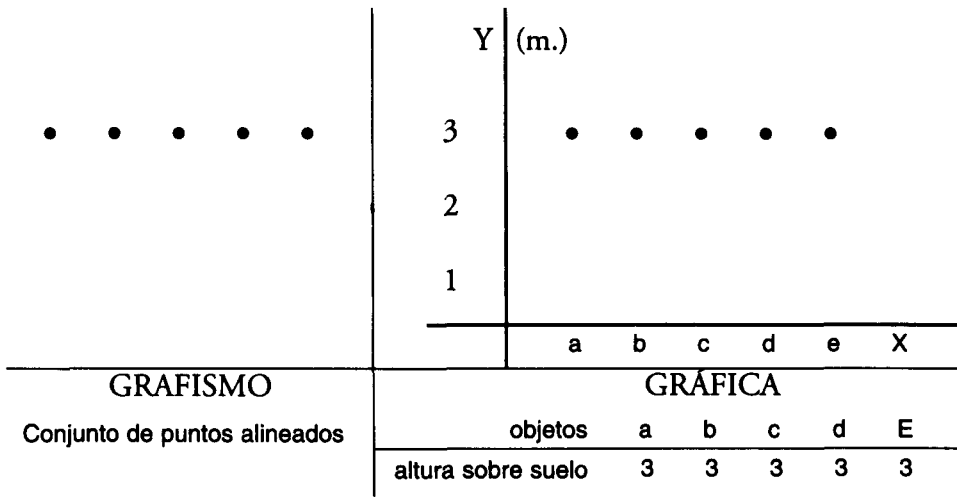


Figura 2. Ejemplos de grafismo y gráfica

La distinción entre grafismo y gráfica es importante pues configuraciones expresivas casi iguales pueden constituir gráficas o grafismos, como en la Figura 2. Y digo casi porque la gráfica, precisamente por serlo, tiene además de los datos propios de esta forma expresiva, en este caso los puntos alineados, otros datos que nos dan el código para interpretarlos; o sea, una gráfica lleva escalas, ejes de coordenadas, símbolos de lectura de los colores, rayados de regiones, etc.

Una parte importante de la expresión gráfica de Matemáticas que aparece en los libros escolares corresponde a la representación de figuras geométricas aisladas o a pequeños conjuntos de las mismas, relacionados entre sí e integrados en una única expresión simbólica, ligada por un código bien determinado a un elemento del plano del contenido: representación de un cubo, del ortocentro de un triángulo, posiciones relativas de rectas y circunferencias, representación del teorema de Thales o de Pitágoras, etc, etc. Todas ellas son grafismos, en el sentido de Bertin de que se pueden comprender en un único acto de percepción, aunque a medida que la figura representada sea más compleja esa percepción sea más difícil y requiera más entrenamiento el lograrla. Estos grafismos son, desde luego, expresiones simbólicas, culturalmente construidas y fuertemente estandarizadas. Aunque en la expresión aparezcan letras para denominar los diferentes elementos de la figura o algún número que suele

indicar medidas, podemos seguir considerándolos grafismos correspondientes a objetos matemáticos individuales.

### **Datos y Configuraciones gráficas de datos en un libro escolar**

En un libro los datos están bajo forma de expresión verbal escrita, gráfica o simbólica principalmente específica. La cifra, letra o palabra, expresión simbólica o grafismo con que se expresa un dato, designa en general una clase y no un elemento individual aislado y sin relaciones con otros.

El tipo de expresión que se elija dependerá de la tecnología de impresión de libros. Hasta hace no mucho las pautas expresivas estaban estrictamente subordinadas a la expresión escrita, alfanumérica y simbólica específica, con poca presencia de expresión gráfica, subordinado todo a las pautas de la composición escrita.

Las técnicas actuales han aportado más posibilidades que han alterado esta situación. Lo primero en que se nota es en la configuración global de una página y luego en las múltiples variedades de grafismos que se utilizan, aun dejando aparte el empleo de fotos y dibujos, así como el color, que son recursos no específicos del área de Matemáticas.

Las configuraciones gráficas de datos son una expresión compleja, mezcla de expresión verbal, gráfica y simbólica específica, como aparece en el esquema de la Figura 1. Tal como pueden observarse en los libros escolares, pueden integrar también expresiones de tipo figurativo y grafismos, y suelen presentarse coloreadas total o parcialmente en los primeros niveles.

Las gráficas, tal como las define Bertín, pertenecen por tanto a las configuraciones gráficas de datos y son, en principio, las más fuertemente codificadas en sus formas expresivas, aunque la introducción del tratamiento gráfico de datos por ordenador las somete a variaciones más o menos relevantes. El prototipo de gráfica es la gráfica de funciones en coordenadas cartesianas; otras gráficas de uso escolar son las correspondientes a cuadros y tablas de datos de tipo estadístico, y que llamaremos simplemente gráficas estadísticas.

En relación a su uso, las configuraciones gráficas de datos se caracterizan por ser las representaciones con que se maneja información compleja formada

por conjuntos de datos más o menos estructurados y relacionados entre ellos. Esa información compleja podría manejarse también por vía verbal o simbólica específica por lo que quizás lo más característico de las diversas formas expresivas de las configuraciones gráficas de datos es que integran, obligatoriamente, formas expresivas correspondientes a representaciones visuales, que aparecen en general como elementos gráficos (rama 3 del esquema de la Figura 1), estructurantes de todo el conjunto expresivo, o bien es la propia disposición en el plano de los elementos expresivos lo que soporta la representación visual, de modo que las configuraciones gráficas de datos tienen una lectura visual además de su posible lectura verbal.

### Cuadros y Tablas

Cuando se maneja en un problema un conjunto de datos relacionados, en los libros aparece una configuración espacial en serie o cadena; las marcas gráficas de la configuración en cadena expresan esa relación, que en la serie apenas está marcada mas que por la secuencia de posiciones en el espacio. La relación subyacente puede ser cualquiera, desde una relación de semejanza a las relaciones más fuertes de orden y equivalencia. La más típica es la de orden.

Una combinación de series horizontales y/o verticales nos dará un cuadro de datos, completo o incompleto. Las formas básicas a priori de cuadros y de datos son:

a	b	c
2	5	7
$\alpha$	$\beta$	$\gamma$

a	b	c
2	5	7
$\alpha$	$\beta$	$\gamma$

a	b	c
2	5	7
$\alpha$	$\beta$	$\gamma$

Figura 3. Cuadros

Los datos aislados, en serie o en cuadro pueden aparecer enmarcados por una figura que suele ser rectangular. La llamaremos recuadro, sea cual fuere

su forma. Cuando hay muchos datos, las disposición en filas y/o columnas se suele enmarcar a su vez, superponiendo al cuadro de datos una gráfica específica que llamaremos rejilla. El conjunto de recuadro más rejilla nos da un espacio cerrado que permite poner un dato en cada casilla. Le daremos el nombre genérico de cuadrícula. Este nombre indica que las figuras que la rejilla genera son cuadrados, pero también la llamaremos cuadrícula aunque las figuras de la rejilla sean triángulos, rectángulos, rombos, etc. En caso de duda se puede denominar con un apellido, por ejemplo rejilla hexagonal o cuadrícula hexagonal. En algunos casos los huecos de las rejillas no son iguales, adaptándose para acomodar no un dato sino una serie de datos en cada hueco.

La forma expresiva cuadrícula tiene un uso tradicional en el que no se inscribe nada en la superficie de cada cuadradito. El propio cuadradito es el dato. Nos encontramos entonces ante un rectángulo dividido en cuadraditos y los datos que se manejan son el número de cuadraditos.

La cuadrícula está asociada también con el sistema cartesiano de coordenadas en el plano y con los diagramas cartesianos. En ambos casos los datos son todos o parte de los puntos de corte de las rectas de la cuadrícula.

Finalmente hay otro uso de la cuadrícula para dibujar recorridos de un punto a otro. Esta forma de expresión está relacionada con los mapas callejeros. En este caso los datos no son ni los cuadros ni los puntos, sino los segmentos recorridos.

En resumen vemos que la cuadrícula se puede utilizar para:

- Inscribir datos en los cuadros.
- Para que los propios cuadros, puntos o segmentos de la cuadrícula actúen como datos.

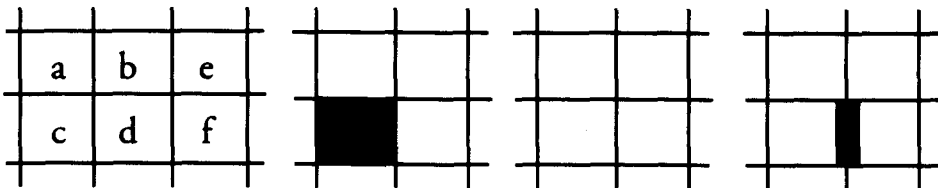


Figura 4. Esquema de uso fundamental de la cuadrícula

## La tabla de datos

Es un conjunto de datos agrupado por filas y/o columnas. Los datos de cada hilera son una clase de datos, y el nombre de la clase suele aparecer explícito, mediante una rotulación verbal escrita, gráfica o simbólica específica de las filas o columnas. La separación entre hileras suele estar señalada por una cuadrícula y con alguna marca, por ejemplo línea más gruesa, que distingue la matriz de datos de las hileras de rótulos. Una expresión típica es la de la figura 5.

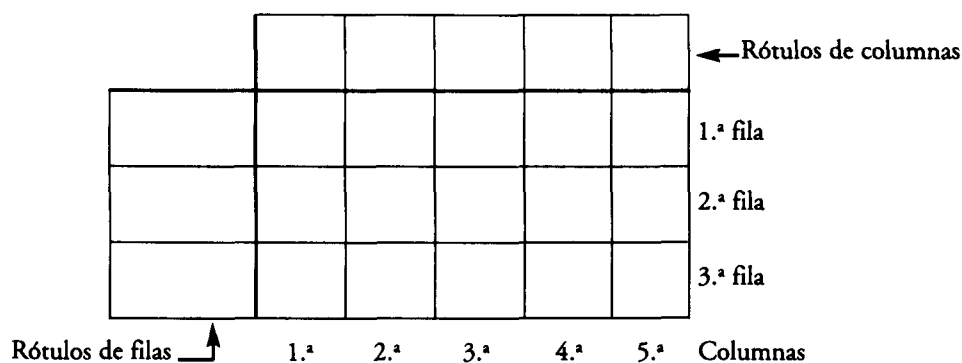


Figura 5. Tabla de datos de dimensión  $3 \times 5$ , vacía

Las tablas de datos las consideraremos incompletas si faltan total o parcialmente los datos de las casillas y/o los rótulos. Esto es una situación normal en el uso didáctico que se hace de esta configuración de datos, que suele constituir parte de un problema, uno de cuyos objetivos es precisamente encontrar los datos que hay que poner en las casillas o, alternativamente, los rótulos de las hileras. En el caso de que no haya ningún indicio de rotulación, consideraremos la configuración como un cuadro de datos y no como una tabla. Las tablas pueden ser de una entrada (sólo filas o sólo columnas rotuladas) o de doble entrada, como la de la figura 5.

Una tabla de operaciones es siempre una tabla de doble entrada. Los rótulos de filas y columnas determinan dos conjuntos de elementos y en cada casilla de la tabla se coloca el resultado de una cierta interacción entre el elemento de fila y columna correspondiente (Figura 6).

$\otimes$	u	v	w
x	0	1	1
y	1	0	1
z	1	1	0

Figura 4. Esquema de uso fundamental de la cuadrícula

### Tipología de tablas encontradas en el análisis de libros escolares

Las tablas constituyen una estructura del lenguaje matemático reconocible por su forma expresiva y su uso específico, aunque relacionado con el de las demás configuraciones gráficas de datos. Un subgrupo de tablas está relacionado en particular con las gráficas en coordenadas cartesianas y los gráficos estadísticos, pudiéndose considerar como representaciones equivalentes. También se relacionan las tablas fuertemente con los cuadros de datos y si no están adecuadamente rotuladas pueden originarse dudas, tal como se manifiesta en el contexto verbal que discrimina poco entre cuadros y tabla de datos.

Voy a intentar una clasificación de ellas en base a criterios sintácticos, semánticos y pragmáticos, considerándolas como unidades bastante estables del Lenguaje Matemático como hipótesis previa. Los tipos obtenidos proceden del análisis de libros escolares de las editoriales Barcanova, Edelvives, Onda, S.M. y ELKAR-G.I.E. para E.G.B. en los años 81 a 92 (Sanz, 1995).

Desde un punto de vista sintáctico estimo que las variaciones morfológicas más destacables son las que originan las tablas de una o doble entrada. Claro es que la expresión superficial no es suficiente para reconocer esta diferencia esencial de forma, por defectos de rotulación, pero estimo que es una variación básica. O sea, toda tabla bien formada debería ser reconocible como perteneciente a uno de estos dos tipos (en el ámbito que analizamos):

- Tabla de una entrada.
- Tabla de doble entrada.

Hay otras variantes que estimo se deben situar en un nivel ortográfico, como son:

- La forma de la cuadrícula y si está completa o no.
- La forma expresiva de los datos.
- La rotulación explícita completa o no.
- Existencia o no de marcas de tipo de operación.
- Marcas de separación o distinción entre hileras de entrada y resto de datos.
- .....

Otras variaciones, como el uso del color y en el tamaño, no afectan esencialmente a la forma expresiva, y las consideraré como variaciones determinadas por hipótesis de enseñanza-aprendizaje a fin de que la expresión resulte adecuada al nivel en que se emplean.

Las variaciones en color y tamaño, así como el uso de expresiones figurativas en los primeros niveles, tienen por tanto una clara justificación. Las variaciones ortográficas en cambio aparecen como una pura dispersión debida a la falta de un patrón normativo, lo cual también afecta a la poca precisión en la forma de tabla de una o dos entradas. Es de esperar que el gran uso que se hace de las tablas en los libros tienda a seleccionar las más adecuadas en relación con los medios expresivos actuales, y que el uso real en la escuela aporte criterios complementarios para seleccionar las mejores formas expresivas, no simplemente las más llamativas.

Podemos aplicar criterios semánticos para distinguir dos tipos de tablas:

- Tablas de datos.
- Tablas de operaciones.

Los dos aparecen en los libros escolares, con un predominio claro de las tablas de datos. Pero en los libros ambos se suelen llamar tablas y, en algunos casos, cuadros. Las tablas de operaciones ya justificamos que serán siempre de doble entrada, por lo que convendría que llevaran siempre algún marcador de operación que las distinguiera de las tablas de datos de doble entrada. Así ocurre en general en las tablas de operaciones aritméticas, pero no en muchas otras, en particular en las de operación lógica. Por tanto sólo

el contexto de uso es el que permite decidir si es una tabla de datos o una tabla de operaciones, con lo que el significado de estas tablas, al menos parcialmente, tiene una determinación pragmática. Sería un ejemplo más de determinación pragmática del significado de los objetos matemáticos como analizan Godino y Batanero (1994).

La combinación de criterios semánticos y pragmáticos nos ha llevado a manejar en la descripción una serie de subtipos que estimo pueden agruparse así:

**A) Tablas de datos**

- \* De correspondencias
  - Correspondencias entre conjuntos
  - Correspondencias entre expresiones (equivalencias expresivas)
- \* De recuentos y medidas
- \* Tablas clasificatorias
  - De clasificación por una o dos características
  - De descomposición por órdenes de unidades
  - De producto cartesiano
- \* Esquemas/resumen
  - Esquemas de cálculos
  - Esquemas de algoritmos
- \* Tablas de calcular
- \* Tablas de recuentos y cálculos estadísticos
- \* Otras

**B) Tablas de operaciones**

- \* De operaciones aritméticas
- \* De operaciones lógicas
- \* De operación de medir
- \* Operaciones conjuntistas
- \* Otras

## Uso de cuadros y tablas en la editorial S.M. en el periodo 81-92 (E.G.B.)

*Cuadros*

Esta configuración sólo en segundo tiene algún peso. Se trata en todos los casos de promover el dominio de la escritura de los números naturales, destacando por la estructura en cuadro las propiedades de las series de unidades y decenas (ver tabla SM., página 24 de segundo curso) y las equivalencias entre la expresión escrita y la numérica (página 32 de segundo). También hay algún cuadro mágico, que se proponen esencialmente como ejercicios de cálculo. Los cuadros de cuarto y quinto son casi todos esquemas de múltiplos y submúltiplos de diferentes unidades del S.M.D. y sus equivalencias con la unidad fundamental.

*Tablas*

Son las configuraciones gráficas de datos más abundantes y casi todas son de una entrada. En la tabla de la figura 7 se puede ver su tipología y distribución por cursos.

## Tablas de datos de una entrada

EDITORIAL: S.M.

Tipo de tabla	Número de ejemplares por curso							
	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º
<i>De recuentos o medidas</i>					4	3	4	
<i>De descomposición por órdenes de unidades</i>		1	2	21	1	1	2	
<i>De clasificación por una característica</i>								
<i>De equivalencias expresivas</i>		1	4	6				1
<i>Esquemas de cálculos</i>	12	1	1	1	11	10	7	1
<i>Esquemas de algoritmos</i>		2	5	2				
<i>Esquemas-Resumen</i>	2	2				2		2
<i>Correspondencias entre conjuntos</i>			1		7		6	
<i>Tipo tabla de calcular</i>			2	2	1		15	27
<i>Recuentos y cálculos estadísticos</i>							23	
<i>Mixtas, otras</i>				1	1			
<i>De clasificación por dos características</i>								
<i>De parejas o conjuntos cartesianos</i>		4						
<i>Otras</i>					1	1		

Figura 7. Tablas de recuentos, por cursos, de cada tipo de tabla de datos (periodo 81-92)

Las tablas más numerosas y casi únicas en los últimos cursos son tablas de tipo estándar  $x/y$  y las estadísticas. Otras predominantes son esquemas de cálculo y descomposición por órdenes de unidades. No hay tablas específicas de clasificación de elementos de un conjunto por alguna característica.

Todas las tablas en su conjunto están enfocadas a la manipulación de datos numéricos, lo mismo que las series y los cuadros de datos.

Las tablas de doble entrada son escasísimas.

### *Tablas de operaciones*

Observando el esquema de distribución por cursos de estas tablas, Figura 8, vemos que se utilizan poco y en quinto nada; además siguen la pauta ya observada en las anteriores configuraciones, o sea, son casi todas de manipulación de datos exclusivamente numéricos. Las reseñadas como de operaciones en general son tablas de operación interna en un conjunto  $A$  de pocos elementos que se usan para ilustrar las propiedades de una operación y las estructuras que se generan. Las de operaciones lógicas apenas si alcanzan esta categoría, pues se reducen a colocar una marca en una casilla que indica la existencia del correspondiente par y están claramente relacionadas con la notación que se utiliza para marcar puntos en el plano en coordenadas cartesianas.

Tablas de datos de una entrada

EDITORIAL: S.M.

CURSO	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º
TIPO								
<i>Operaciones aritméticas</i>	2	3	4	8			2	1
<i>Operaciones lógicas</i>						4	3	1
<i>Operación de medir</i>								
<i>Operaciones. Conjuntistas, otras</i>						8		1

Figura 8. Tabla de recuentos, por cursos, de cada tipo de tabla de operaciones (periodo 81-92)

### Uso de cuadros y tablas en la editorial S.M. en el periodo 92-99 (Educación Primaria)

La última reforma de la enseñanza obligatoria ha cambiado la E.G.B. (6 a 14 años) por la Educación Primaria (6 a 12 años) más la E.S.O. (12 a 16 años).

En Matemáticas ha supuesto la desaparición de la teoría de conjuntos con todas las expresiones simbólicas de la escritura y las configuraciones gráficas asociadas, especialmente las tablas de operaciones lógicas. En todas las editoriales se observa una mayor dedicación al estudio del sistema de numeración decimal, excluyendo el de otras bases, y al sistema métrico de medidas.

En los libros de la editorial S.M. se observa, desde el primer nivel, un empleo sistemático de dibujos, grafismos y configuraciones gráficas de datos, además de atender a una buena expresión escrita. Los de primer ciclo están diseñados como cuadernos de trabajo, para marcar sobre ellos siguiendo series de órdenes: cuenta, completa, une, colorea, clasifica, dibuja, calcula, etc. Los de segundo y tercer ciclo son más libros para guiar el estudio, tanto en comprensión lectora y memorización como de práctica de actividades de cálculo y resolución de problemas verbales. Los diferentes tipos de cuadros y tablas que hay en estos libros se recogen en las figuras 9, 10 y 11.

## CUADROS

EDITORIAL: S.M.

Tipo de tabla	Número de ejemplares por curso					
	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º
<i>Cuadros numéricos</i>	2	1		1	1	
<i>Cuadro de equivalencias</i>	4			3	3	
<i>Cuadro de correspondencias</i>		1				
<i>Cuadro-mapa</i>	3	2	4	8		

Figura 9. Tabla de recuentos, por cursos, de los tipos de cuadros (periodo 92-99)

## Tablas de operaciones

EDITORIAL: S.M.

Tipo de operaciones	Número de ejemplares por curso					
	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º
<i>De sumar</i>	3					
<i>De restar</i>	1					
<i>De multiplicar</i>		2	3	5		1
<i>Lógicas</i>						
<i>De medir</i>						
<i>Conjuntistas, otras</i>						

Figura 10. Tabla de recuentos, por cursos, de tablas de operaciones (periodo 92-99)

## Tablas de datos de una entrada

EDITORIAL: S.M.

Tipo de tabla	Número de ejemplares por curso					
	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º
<i>De recuentos o medidas</i>	2		7	8	10	8
<i>De descomposición por órdenes de unidades</i>	12	10	19	9	17	9
<i>De clasificación por una característica</i>	1		2			
<i>De equivalencias expresivas</i>			3	3		30
<i>Esquemas de cálculos</i>			15	29	21	15
<i>Esquemas-Resumen</i>						
<i>Correspondencias entre conjuntos</i>	1	1			10	
<i>Tipo tabla de calcular</i>						
<i>Recuentos y cálculos estadísticos</i>			4	21	7	
<i>Mixtas, otras</i>			3	6	2	1

## Tablas de datos de dos entradas

<i>De clasificación por dos características</i>						
<i>De recuentos</i>	2	4	2	6	7	6
<i>De recuentos y cálculos estadísticos</i>						9
<i>De caracteres lógicos</i>	5	6	5		1	3
<i>Esquemas de cálculo</i>						3
<i>Mixtas, otras</i>					2	

Figura 11. Tabla de recuentos, por cursos, de tablas de datos (periodo 92-99)

Desde el punto de vista ortográfico encontramos ciertas deficiencias que originan dudas respecto a determinar el tipo a que pertenecen. Así, los cuadros que he llamado de correspondencias y equivalencias son por su forma cuadros, pero estimo que son esencialmente tablas, aunque como no están rotulados los he incluido entre los cuadros. Otra situación confusa es la de las configuraciones que he situado como tablas de doble entrada de los tipos tablas de recuentos y esquemas de cálculo, que son esencialmente tablas de una entrada ya que indican la correspondencia entre un objeto y sus medidas o entre una operación y sus componentes; pero como no se rotula la primera columna son, aparentemente, de doble entrada. En el mismo libro aparece en algún caso esa incoherencia (Figura 12). Lo mismo puede decirse de algunas tablas de equivalencias expresivas (Figura 13). Cuando está clara la irrelevancia de la rotulación por filas he optado por contabilizarlas como tablas de una entrada.

(1) Utiliza la prueba de la división para saber si estas divisiones están bien hechas:

	Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
División A	65.891	173	380	150
División B	108.433	246	441	0

S.M., 6.º curso, página 22

(3) Utiliza la prueba de la división para señalar cual de las siguientes divisiones es incorrecta:

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
156	22	7	2
1.309	27	48	8
3.621	3	1.207	0

S.M., 6.º curso, página 26

Figura 12. Transformación de la tabla de datos de doble entrada en una entrada, al prescindir de la información irrelevante de la primera columna

	Porcentaje	Fracción	Significado	Se lee
Lucas	27 %	27 / 100	27 de cada 100	27 por ciento
Marta	19 %	19 / 100	19 de cada cien	19 por ciento
Ramón	8 %	8 / 100	8 de cada cien	8 por ciento

Porcentaje	Se lee	Significa
78 %		
	45 por ciento	
		92 de cada cien

S.M., 6.º curso, página 93

Figura 13. Transformación de la tabla de datos de doble entrada en una entrada entre dos tablas de equivalencias expresivas

Desde el punto de vista semántico se observan diferentes tipos, aunque desigualmente representados. Muy utilizados y presentes en todos los cursos son las tablas que tienen el nombre especial de descomposición por órdenes de unidades, que enlazan con la práctica de algoritmos de cálculo e indican la atención prestada al estudio del sistema de numeración decimal y operaciones con él. Son tablas de clasificación, pero reciben tradicionalmente ese otro nombre, que se corresponde con la operación de descomponer un número, y algunas veces la medida de una cantidad en cierta unidad, en sus diferentes órdenes de unidades, y no se ven como una clasificación. Otros grupos bien representados son las correspondencias llamadas recuentos y medidas (en forma de cuadros y tablas), que reflejan la extracción de datos de un mundo y son base para construir, en muchos casos, gráficos cartesianos o gráficos estadísticos (de barras, pictogramas, etc.) que aparecen también en estos libros.

*Las tablas de equivalencias expresivas* son muy interesantes desde el punto de vista semántico pues implican la traducción de una forma de expresión a otra. Un representante típico es la tabla de la figura 14.

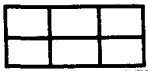


Representación					
Se escribe				5 / 8	
Se lee					dos quintos

Figura 14. *Tabla de equivalencias expresivas. 6.º curso S.M.*

Son muy escasas las tablas de clasificación, excepto las citadas de descomposición por órdenes de unidades.

Está presentes además un grupo de tablas que he llamado de características lógicas y que, en parte al menos, parecen alternativas a conceptos de la desaparecida teoría de conjuntos. Reflejan la característica de pertenencia o no a un conjunto por criterios de color, forma, tamaño, uso, etc., o establecen comparaciones entre los datos de entrada por filas y columnas que obligan a la contestación sí o no, cuyo significado de base es la existencia de una relación de orden o de clasificación.

Las tablas que he llamado esquemas de cálculos y de algoritmos son muy poco significativas, en cuanto a que con ellas no se pretende construir un concepto

matemático específico. Su significado consiste en la propia construcción de la forma expresiva, el cuadro o la tabla, o sea el uso implica aprender a expresar en forma de cuadro o tabla un conjunto numeroso de datos, ya que al situarlos en esa forma se facilita la expresión de los resultados de los cálculos de forma sistemática y clara. Algunas se podrían asimilar a tablas de calcular, ya que se obtienen los datos de una fila o columna multiplicando por un número los datos de la otra fila o columna.

*Las tablas de operaciones* se han reducido a las de operaciones aritméticas. Además de las reseñadas aparecen las llamadas tablas de multiplicar en notación tradicional, que se destacan como material de taller en el libro 2 y en la contraportada del 3, seguramente como material auxiliar o a memorizar. No han sido incluidas en el recuento de tablas que he realizado.

En cuanto a los cuadros esenciales (numéricos y cuadros-mapa) están bien representados, y se hace un uso muy interesante de los cuadros-mapa, que inician a la orientación y medida en el plano.

En conjunto la editorial S.M., en los libros analizados para Educación Primaria, hace bastante uso de cuadros y tablas de datos y operaciones, salvo esa ausencia señalada de las clasificatorias. Además de las configuraciones señaladas hay algún cuadro mágico, crucigramas y calendarios; estas últimas son expresiones culturales estándar que se aprenden sin asociar con el aprendizaje de matemáticas, aunque es claro que son Lenguaje Matemático. Considero una nota positiva el discreto uso que hace del color, por ejemplo para marcar la cuadrícula o para diferenciar con dos tonos del mismo color, de modo alternativo, las casillas rotuladas verbalmente.

### **Comparación entre los libros para E.G.B. y los de Primaria de la Editorial S.M.**

Se ha intensificado el uso de tablas de recuentos en todos los niveles, salvo en segundo. En tercero, cuarto y quinto aparecen las de recuentos y cálculos estadísticos, antes inexistentes. También se han intensificado las de esquemas de cálculo a partir de tercero y las de descomposición por órdenes de unidades, con un adelanto aparente de su uso máximo que antes estaba en cuarto y ahora en tercero.

Las tablas de operaciones aritméticas se mantienen estables, con ausencia significativa en quinto en ambos periodos, lo que presupone que su estudio ha

concluido al llegar a ese nivel. Han desaparecido las tablas de operaciones conjuntistas y lógicas, como era de esperar; compensadas en parte por las tablas de características lógicas.

La ausencia de tablas de clasificación en los libros de la década anterior se ha corregido muy escasamente con la aparición de esas tres tablas de una entrada en los libros actuales.

Siguen los problemas ortográficos que originan indeterminaciones en la clasificación de las tablas, o sea, están originándose clases borrosas. Esto puede ser debido a una causa intrínseca, o sea, que la variabilidad del uso escolar es tal que no permite clasificaciones estrictas, pero también puede achacarse a que su forma expresiva está poco fijada y se introducen artificios didácticos en ella.

### **Observaciones finales respecto a tablas y cuadros**

Todas las tablas y cuadros que aparecen en los libros escolares tienen un significado común determinado por las actividades que con ellas se realizan y que es la construcción de esas formas expresivas del Lenguaje Matemático. Los estudiantes aprenden con su uso a colocar datos en forma de cuadro o tabla principalmente y en algunos casos los problemas propuestos pueden consistir además en construir el soporte gráfico o los rótulos de filas y columnas para colocar los datos en esas formas expresivas.

Algunos cuadros y tablas tienen un contenido semántico más fuerte, determinado por el concepto matemático que se trabaja con ellos. Quiero destacar especialmente:

- Las tablas de clasificación, porque construyen ese significado, la clasificación, entrenando a agrupar los datos que pertenecen a la misma clase, destacando en su rotulación las relaciones por las que se clasifica.
- Las tablas de correspondencia, incluyendo las de recuentos y medidas. Estas últimas se asocian enseguida con la construcción de gráficos cartesianos y gráficos estadísticos, y son la base para el descubrimiento de leyes (la primera suele ser la de proporcionalidad).

Ambos tipos de tablas son elementos del Lenguaje Matemático que se usan en todos los libros de ciencias sociales y de la naturaleza desde los primeros niveles, (ver ejemplo en la figura 15).

Lortu urteko hainbat egunetako egunkariak eta, informazio hori bilduz eta egunak ordenan jarriz, osatu hemen edo zure koadernoan era honetako taula bat:

Eguna	Eguzkia		Egunaren Iraupena	Tenperatura	
	Irteera	Sarrera		Gorena	Baxuena
Otsailak 22	7h 57min	18h 47min	10h 50min	8.°C	3.°C

Figura 15. Tabla de correspondencias. *Ingurunea 5, EREIN (1994)*

Este tipo de tablas son auténticos instrumentos de investigación científica, y debe promocionarse su cuidadosa construcción y un amplio uso de las mismas.

En cuanto a la corrección ortográfica es de esperar que el uso determine las formas más cómodas y atractivas y los autores cuiden su corrección y restrinjan la inclusión de información irrelevante.

## Referencias

- BERTIN, J. (1988): *La gráfica y el tratamiento gráfico de la información*. Madrid. Taurus.
- Bruner, J. (1984): *Acción, pensamiento y lenguaje*. Madrid. Alianza.
- ESCOLANO, E. (1998): «Libros de trabajo y cuadernos de ejercicios». *Historia ilustrada del libro escolar en España*. Madrid. Fundación Germán Sánchez Ruipérez. Páginas 303 a 326.
- GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1994): «Significado personal e institucional de los objetos matemáticos». *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 14, 325-355.
- GODINO, J. D. (2000): «Significado y comprensión de los conceptos matemáticos». *Uno*, 25, 77-87.

- GOÑI, J. M. y SANZ, I. (1990): «Diferentes niveles de representación de conceptos básicos de Física y Matemática». *Structures in Mathematical Theories*. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.
- HALLYDAY, M. A. K. (1978): «Language as Social Semiotic». *The social interpretation of Language and meaning*. Londres. Edward Arnold.
- LABORDE, C. (1982): *Langue naturelle et écriture symbolique*. Tesis doctoral. Universidad de Grenoble.
- MARINONI, A. y MANEGUZZO, M. (1987): *Leonardo da Vinci. Dibujos. La invención y el arte en el lenguaje de las imágenes*. Madrid. Debate.
- PIMM, D. (1987): *Speaking Mathematically*. London and New York. Rotledge and Kegan Paul.
- RUIZ, E. (1992): *Hacia una semiología de la escritura*. Madrid. Pirámide.
- SANZ, I. (1990): Comunicación, Lenguaje y Matemáticas. *Teoría y Práctica de la Educación Matemática*. Sevilla. Alfar. Páginas 173 a 235.
- SANZ, I. (1995): *La construcción del lenguaje matemático a través de los libros escolares de matemáticas. Las configuraciones gráficas de datos*. Tesis doctoral. Leioa. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.
- VYGOTSKI, L. S. (1991): *Obras escogidas*. Tomo I. Madrid. Visor. (Moscú. Ed. Pedagógica, 1982).
- VYGOTSKI, L. S. (1993): *Obras escogidas*. Tomo II. Madrid. Visor. (Moscú. Ed. Pedagógica, 1982).